数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 102-119

A Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants and its application *

Masao ISHIKAWA† and Hiroyuki TAGAWA‡

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 05A30
Secondary 05A15, 15A15, 33D45.

組合せ論的表現論とその応用
京都大学数理解析研究所 111 号室
平成 22 年 10 月 19 日 (火) ～ 22 日 (金)

概要

この講演の目的は, 次のパフィアンの等式を証明することである:

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^{2};q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\le i,j\le 2n}=a^{n(n-1)}$$
$$\times\, q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r}\prod_{k=1}^{n-1}(bq;q)_{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{r+2k-1}}{(abq^{2};q)_{r+2(k+n)-3}}.$$

この等式は RIMS Kôkyûroku Bessatsu (2009) の中の我々の論文で証明された次の等式のパフィアン版とみなすことができる:

$$\det\left(\frac{(aq;q)_{i+j-2}}{(abq^{2};q)_{i+j-2}}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=a^{\frac{1}{2}n(n-1)}q^{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q,aq,bq;q)_{n-k}}{(abq^{n-k+1};q)_{n-k}(abq^{2};q)_{2(n-k)}}.$$

この講演の内容の詳細・応用は本論文 [14] を参照されたい.

*Joint work with Jiang Zeng (Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France).

†Department of Mathematics, Faculty of Education, Tottori University, Koyama, Tottori 680-8550, Japan, `ishikawa@fed.tottori-u.ac.jp`

‡Faculty of Education, Wakayama University, Sakaedani, Wakayama 640-8510, Japan, `tagawa@math.edu.wakayama-u.ac.jp`

1 Introduction

カタラン数のハンケル行列式は, 最近 lattice path による組合せ論的解釈等をめぐって多くの研究者の注目を浴びている (例えば [2, 5, 6, 11, 13, 22, 26] を見よ). $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ が, ある直交多項式のモーメント列であるとき, ハンケル行列式 $\det\left(\mu_{i+j-2}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ が, 積の公式を持つことは直交多項式の古典論で良く知られた事実である ([13] を見よ). この講演の中では, 我々は, このパフィアン版について考察を行う.

行列 $A=(a^i_j)_{i,j\geq 1}$ (または $A=(a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$) が 反対称であるとは, すべての $i,j\geq 1$ (または $1\leq i,j\leq n$) に対して $a^j_i=-a^i_j$ が成り立つことである. 偶数 n に対して $n\times n$ の反対称行列 $A=(a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ が与えられたとき, A のパフィアン$\operatorname{Pf} A$ は次式で定義される ([26, 27] を見よ).

$$\operatorname{Pf}(A)=\sum \epsilon(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1},\sigma_n)\,a^{\sigma_1}_{\sigma_2}\dots a^{\sigma_{n-1}}_{\sigma_n}. \tag{1.1}$$

ここで, 和は $[n]:=\{1,2,\dots,n\}$ の 2-元ブロックへの分割

$$\sigma=\{\{\sigma_1,\sigma_2\}_<,\dots,\{\sigma_{n-1},\sigma_n\}_<\}$$

全体を動き, $\epsilon(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1},\sigma_n)$ は置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

の符号を表す. $[n]$ の分割 σ の 2-元ブロックへの分割を **perfect matching** または **1-factor** という.

ほとんどの直交多項式は q-アナログを持つので, モーメントのハンケル行列式のパフィアン版を考える際も, 普通の場合と q-アナログを考察する必要性がある. 具体的には, モーメント μ_n のハンケル行列式のパフィアン版としては $\operatorname{Pf}\left((j-i)\,\mu_{i+j+r-2}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$ を, またこのモーメント μ_n の q-アナログ $\mu_n(q)$ のハンケル行列式に対してはそのパフィアン版として

$$\operatorname{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\,\mu_{i+j+r-2}(q)\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$$

を考察することにする. ここで r は, ある固定した整数である. この講演では, 主に μ_n が little q-Jacobi polynomial のモーメントである場合を取り扱う. この講演を通して, 次の記号を使うことにする ([4, 9] を見よ):

$$(a;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \qquad (a;q)_n=\frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}.$$

ここで n は整数とする. 一般に $(a;q)_n$ は q**-shifted factorial** と呼ばれ, さらに次の略記法をしばしば使う:

$$(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_\infty=(a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty\cdots(a_r;q)_\infty,$$
$$(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_n=(a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_r;q)_n.$$

q**-超幾何級数** ${}_{r+1}\phi_r$ は次式で定義される:

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_{r+1}\\ b_1,\dots,b_r\end{matrix};q,z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\dots,a_{r+1};q)_n}{(q,b_1,\dots,b_r;q)_n}z^n.$$

little q-Jacobi polynomial [9, 20] は

$$p_n(x;a,b;q)=\frac{(aq;q)_n}{(abq^{n+1};q)_n}(-1)^nq^{\binom{n}{2}}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{-n},abq^{n+1}\\ aq\end{matrix};q,xq\right] \tag{1.3}$$

によって定義され, 次式で定義される **内積** に関して直交している:

$$\langle f,g\rangle=\frac{(aq;q)_\infty}{(abq^2;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(bq;q)_k}{(q;q)_k}(aq)^kf\left(q^k\right)g\left(q^k\right). \tag{1.4}$$

little q-Jacobi polynomial のモーメントは

$$\mu_n=\langle x^n,1\rangle=\frac{(aq;q)_n}{(abq^2;q)_n}\quad(n=0,1,2,\dots)$$

によって与えられる. 本稿では $\mathrm{Pf}\Big(\big(q^{i-1}-q^{j-1}\big)\mu_{i+j-2}\Big)_{1\le i,j\le 2n}$ を主に考察し, 主結果は 第 3 節にまとめてある.

このパフィアンの評価を行うために, ここでは行列の LU-分解に似た反対称行列の分解を考え, それをパフィアン分解と呼ぶことにする. 第 2 節では, このパフィアン分解の定理を述べ, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem [7, Theorem 3.12] のパファイン版を使って証明する. 第 4 節で, 第 3 節で述べられた主結果の証明を与える. 定理 3.1 の中で述べられる上の反対称行列のパフィアン分解は, これらの分解行列の積が 1 つの和で与えられることから, terminating very-well-poised ${}_6\phi_5$ series に関する q-Dougall formula (4.10) と呼ばれる公式に帰着される ([4, 9] を見よ). この証明の副産物として, 定理 4.2 の中で述べられるもう 1 つの反対称行列のパフィアン分解が得られることもわかる. これらのパフィアンの組合せ論的応用については紙面の都合上割愛せざる得ないが, 興味のある方は本論文 [14] を見られたい.

2 パフィアン分解

最初に行列の LU-分解を復習する．$A=(a^i_j)_{i,j\geq 1}$ を行列として，$I=\{i_1,\ldots,i_r\}$ $(J=\{j_1,\ldots,j_r\})$ を行 (resp. 列の) 添字集合とする．このとき A から行集合 I と列集合 J の添字を選びだして得られる $r\times r$ 小行列を $A^I_J=A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r}$ と書く．また $|I|=|J|>0$ のとき $\det A^I_J$ を $a^I_J=a^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r}$ で表す．(ただし $I=J=\emptyset$ のときは 1 とする.) 次の等式は Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem [7, Theorem 3.12] と言われる．

$$\begin{aligned}&\det A^{[n-2]}_{[n-2]}\det A^{[n]}_{[n]}\\&\quad=\det A^{[n-2],n-1}_{[n-2],n-1}\det A^{[n-2],n}_{[n-2],n}-\det A^{[n-2],n-1}_{[n-2],n}\det A^{[n-2],n}_{[n-2],n-1}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

次の命題は通常行列の LU-分解と言われる．普通 LU-分解は L は lower unitriangular 行列で U は upper triangular 行列を取る．ここでは，次の定理 2.2 との比較のために LDU-分解を使う．すなわち L と U は，それぞれ (lower or upper) unitriangular 行列で D は対角行列である．A が rank n の $n\times n$ 行列のとき，$n\times n$ の置換行列 P が存在してすべての $i=1,\ldots,n$ に対して $\det(PA)^{[i]}_{[i]}\neq 0$ が成り立つようにできる．この置換行列 P は unique ではないが，次の定理の組 (L,D,U) は A, P に対して唯 1 つ決まる．次の Theorem 2.2 と比較するためにこの命題の証明をここに含めることにする．

命題 2.1. n を正整数とし，$A=(a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ を rank n の $n\times n$ 行列とする．すべての $1\leq i\leq n$ に対して $\det(PA)^{[i]}_{[i]}\neq 0$ となる $n\times n$ の置換行列 P を選ぶと PA は

$$PA=L\,D\,U\tag{2.2}$$

と一意的に書ける．ここで $D=(d_i\delta^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ は対角行列，$L=(l^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ は lower unitriangular 行列，$U=(u^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ は upper unitriangular 行列で，その成分は次のように書ける．

$$d_i=\frac{\det(PA)^{[i]}_{[i]}}{\det(PA)^{[i-1]}_{[i-1]}},\qquad l^i_j=\frac{\det(PA)^{[j-1],i}_{[j]}}{\det(PA)^{[j]}_{[j]}},\qquad u^i_j=\frac{\det(PA)^{[i]}_{[i-1],j}}{\det(PA)^{[i]}_{[i]}}.$$

ここで Kronecker のデルタ記号 δ^i_j は $i=j$ のとき値 1 を，$i\neq j$ のときは値 0 を取る．

Proof. ここでは $P=I_n$ として証明する．a^i_j は $l^i_i=u^i_i=1$ となる l^i_i, u^i_i を使って $a^i_j=\sum_{k=1}^{\min(i,j)}l^i_kd_ku^k_j$ $(1\leq i\leq n)$ と書けることを示す．$n=1$ の

ときは, 明らかである. $n \geq 2$ として, $1 \leq i, j \leq n-1$ に対して, 上式が成り立つと仮定する. まず u_n^i は $1 \leq i < n$ のとき,

$$a_n^i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{[k]}^{[k-1],i}\, a_{[k-1],n}^{[k]}}{a_{[k-1]}^{[k-1]}\, a_{[k]}^{[k]}} + d_i u_n^i$$

を満たすことを示したい. この式は帰納法の仮定により得られる式

$$a_i^i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{[k]}^{[k-1],i}\, a_{[k-1],i}^{[k]}}{a_{[k-1]}^{[k-1]}\, a_{[k]}^{[k]}} + \frac{a_{[i]}^{[i]}}{a_{[i-1]}^{[i-1]}}$$

において A の第 i 列 を第 n 列に置き換えることによって得られる. よって $d_i u_n^i = a_{[i-1],n}^{[i]}/a_{[i-1]}^{[i-1]}$. ゆえに $u_n^i = a_{[i-1],n}^{[i]}/a_{[i]}^{[i]}$ が得られる. $1 \leq j \leq n-1$ のとき l_j^n が上式で与えられることも同様である. したがって $i = j = n$ のときを示せばよい. すなわち

$$a_n^n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{[k]}^{[k-1],n}\, a_{[k-1],n}^{[k]}}{a_{[k-1]}^{[k-1]}\, a_{[k]}^{[k]}} + d_n$$

を示さなければならない. 帰納法の仮定より

$$a_{n-1}^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{a_{[k]}^{[k-1],n-1}\, a_{[k-1],n-1}^{[k]}}{a_{[k-1]}^{[k-1]}\, a_{[k]}^{[k]}} + \frac{a_{[n-1]}^{[n-1]}}{a_{[n-2]}^{[n-2]}}$$

が成り立つので

$$a_n^n - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{a_{[k]}^{[k-1],n}\, a_{[k-1],n}^{[k]}}{a_{[k-1]}^{[k-1]}\, a_{[k]}^{[k]}} = \frac{a_{[n-2],n}^{[n-2],n}}{a_{[n-2]}^{[n-2]}}$$

となる. よって

$$d_n = a_n^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{[k]}^{[k-1],n}\, a_{[k-1],n}^{[k]}}{a_{[k-1]}^{[k-1]}\, a_{[k]}^{[k]}} = \frac{a_{[n-2],n}^{[n-2],n}}{a_{[n-2]}^{[n-2]}} - \frac{a_{[n-1]}^{[n-2],n}\, a_{[n-2],n}^{[n-1]}}{a_{[n-2]}^{[n-2]}\, a_{[n-1]}^{[n-1]}}$$

となり, (2.1) より $a_{[n]}^{[n]}/a_{[n-1]}^{[n-1]}$ に等しいことがわかる. 逆に, $d_n = a_{[n]}^{[n]}/a_{[n-1]}^{[n-1]}$ を取ると明らかに上の式を満たす. □

行列 L, D, U の成分が A の小行列式で表せることは Painlevé 方程式に関する文献 [24] を見よ. 上の LDU-分解は A が反対称行列のときも使え

るが, しばしば次の定理の分解を考える方が成分の整合性が取れているように見える. この分解では, 成分は小パフィアンで与えられる. この分解は可積分系でも応用を見出せそうである ([1] を見よ).

J_2 によって次のような 2×2 反対称行列

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

を表し, 主対角ブロックに 2×2 行列 J_2 を n 個並べ, 他のブロックは 2×2 零行列 O_2 である $2n \times 2n$ 行列を $J_{2n} = J_2 \oplus \cdots \oplus J_2$ と書く. よって ${}^tJ_{2n}J_{2n} = I_{2n}$ となる.

反対称行列 A に対しては, 我々はいつも $I = J$ と取るので今後我々は A_I^I の代わりに $A_I = A_{i_1,\ldots,i_r}$ と書く. さらに $a_I = a_{i_1,\ldots,i_r}$ によって $\operatorname{Pf} A_I$ を表す. ここで $I = \emptyset$ のときは $a_I = 1$ とする. (2.1) の Desnanot-Jacobi adjoint-matrix theorem のパフィアン版として次の公式が挙げられる ([16, 18] を見よ):

$$\begin{aligned} a_{[n-4]}a_{[n]} = {} & a_{[n-4],n-3,n-2}a_{[n-4],n-1,n} \\ & -a_{[n-4],n-3,n-1}a_{[n-4],n-2,n} + a_{[n-4],n-3,n}a_{[n-4],n-2,n-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

次の定理を, 反対称行列 A のパフィアン分解ということにする.

定理 2.2. n を正整数とし, $A = (a_j^i)_{1 \le i,j \le 2n}$ を $2n$ 次の反対称行列とする. すべての $1 \le i \le n$ に対して $a_{[2i]} \ne 0$ が成り立つならば A は次のように一意的に分解する.

$$A = {}^tV\,T\,V. \tag{2.4}$$

ここで T と V は次のように 2×2 ブロックで書ける:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & O_2 & \ldots & O_2 \\ O_2 & T_2 & \ldots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} J_2 & V_2^1 & \ldots & V_n^1 \\ O_2 & J_2 & \ldots & V_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \ldots & J_2 \end{pmatrix}.$$

実際には $T_i = \begin{pmatrix} 0 & t_i \\ -t_i & 0 \end{pmatrix}$ $(1 \le i \le n)$ と $V_j^i = \begin{pmatrix} v_{2j-1}^{2i-1}(i) & v_{2j}^{2i-1}(i) \\ v_{2j-1}^{2i}(i) & v_{2j}^{2i}(i) \end{pmatrix}$ $(1 \le i < j \le n)$ の成分は

$$t_i = \frac{a_{[2i]}}{a_{[2i-2]}}, \qquad v_l^k(i) = \frac{a_{[2i-2],k,l}}{a_{[2i]}} \tag{2.5}$$

という小パフィアンで書ける. ここで $1 \le i \le n$, $1 \le k, l \le 2n$ とする.

定理の証明を行う前に, この分解の例を挙げよう. 4×4 反対称行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ に対して上の分解は

$$T=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_{1234}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_{1234}}{a_{12}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad V=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{14}}{a_{12}} \\ -1 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{24}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられる. ここで $a_{ij}=\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a^i_j \\ -a^i_j & 0 \end{pmatrix}=a^i_j$, $a_{1234}=\operatorname{Pf}A$ とする.

Proof of Theorem 2.2. まず, 行列 A を 2×2 ブロックに分解する.

$$A=\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{pmatrix}.$$

ここで, $1\le i,j\le n$ に対して各 A^i_j は 2×2 ブロック行列 $A^i_j=\begin{pmatrix} a^{2i-1}_{2j-1} & a^{2i-1}_{2j} \\ a^{2i}_{2j-1} & a^{2i}_{2j} \end{pmatrix}$ とする. よって (2.4) の分解は次の式と同値である:

$$A^i_j=\sum_{k=1}^{\min(i,j)} {}^tV^k_i\, T_k\, V^k_j. \tag{2.6}$$

ここで $V^i_i=J_2$ とする. n に関する数学的帰納法で証明する. $n=1$ のとき, (2.6) より $T=T_1=A^1_1=A$ かつ $V=V^1_1=J_2$ となるので存在と一意性は明らかである. $n\ge 2$ と仮定して, $n-1$ まで与式が成り立つとする. すなわち $1\le i,j<n$ に対する (2.6) 式が $1\le i,j<n$ に対する T_i と V^i_j を一意的に決め, その答えは (2.5) 式で与えられるとする. よって (2.6) 式より $1\le i<n$ に対して

$$\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{a_{[2k-1],2i-1}a_{[2k-2],2k,2i}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}-\frac{a_{[2k-2],2k,2i-1}a_{[2k-1],2i}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}\right)+\frac{a_{[2i]}}{a_{[2i-2]}}=a^{2i-1}_{2i}$$

が成り立つ. この式で 第 $(2i-1)$ 行/列を 第 r 行/列で, 第 $2i$ 行/列を 第 s 行/列で置き換えると, 任意の r, s に対して, 次の式が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{a_{[2k-1],r}a_{[2k-2],2k,s}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}-\frac{a_{[2k-2],2k,r}a_{[2k-1],s}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}\right)+\frac{a_{[2i-2],r,s}}{a_{[2i-2]}}=a^r_s. \tag{2.7}$$

(2.6) 式を方程式として解くことにより, v_s^r ($1 \le i < n$, $r = 2i-1, 2i$, $s = 2n-1, 2n$) は次の式を満たさなければならない:

$$\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{a_{[2k-1],r}a_{[2k-2],2k,s}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}} - \frac{a_{[2k-2],2k,r}a_{[2k-1],s}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}\right) + \frac{a_{[2i]}}{a_{[2i-2]}}v_s^r = a_s^r.$$

この式を (2.7) と比較すると, (2.5) 式で与えられる v_s^r がこの方程式の唯一の解であることがわかる. 同様に, (2.6) 式の各成分の計算により, t_n は次の式を満たさなければならない:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{[2k-1],2n-1}a_{[2k-2],2k,2n}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}} - \frac{a_{[2k-2],2k,2n-1}a_{[2k-1],2n}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}\right) + t_n = a_{2n}^{2n-1}.$$

$i = n-1$, $r = 2n-1$, $s = 2n$ を (2.7) 式に代入することによって, 次の式を得る:

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{a_{[2k-1],2n-1}a_{[2k-2],2k,2n}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}} - \frac{a_{[2k-2],2k,2n-1}a_{[2k-1],2n}}{a_{[2k-2]}a_{[2k]}}\right) + \frac{a_{[2n-4],2n-1,2n}}{a_{[2n-4]}} = a_{2n}^{2n-1}.$$

よって

$$t_n = \frac{a_{[2n-4],2n-1,2n}}{a_{[2n-4]}} - \frac{a_{[2n-3],2n-1}a_{[2n-4],2n-2,2n}}{a_{[2n-4]}a_{[2n-2]}} + \frac{a_{[2n-4],2n-2,2n-1}a_{[2n-3],2n}}{a_{[2n-4]}a_{[2n-2]}}$$

となる. ここで (2.3) 式を使うことによって (2.5) 式で与えられた t_n がこの方程式の唯一の解であることがわかり, n の場合も成り立つことがわかる. これで定理が証明された. □

この定理からわかるのは, 我々が T と V の各成分を予想すれば, この分解の存在と一意性によって, 上の行列の積が成り立つことを示せば十分であることである. すなわち我々が証明しなければいけないのは次の一重和の式である:

$$\sum_{k\ge1}\left\{v_i^{2k-1}(k)t_kv_j^{2k}(k) - v_i^{2k}(k)t_kv_j^{2k-1}(k)\right\} = a_j^i.$$

(2.5) 式よりわかるのは小パフィアン $a_{[2i-1],j}$ と $a_{[2i-2],2i,j}$ の予想式を任意の i と j について作ればよいことである.

LDU-分解 (2.2) の一意性とパフィアン分解 (2.4) の一意性から, *LDU*-分解とパフィアン分解は, 或る意味同値である. *LDU*-分解は パフィアン分解から得られるし, また逆も真である.

3 q-カタランハンケル行列式のパフィアン版

今後 $i,j \geq 1$ に対して

$$a_j^i = (q^{i-1} - q^{j-1}) \frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}} \tag{3.1}$$

と書くことにする. A を

$$A = \left(a_j^i\right)_{i,j\geq 1}$$

によって定義される (半無限次の) 反対称行列とする. 次の定理は A のパフィアン分解を与える.

定理 3.1. A を上の行列とし

$$t_i = a^{i-1} q^{(i-1)(i+r)} \frac{(q;q)_i (aq;q)_{i+r} (bq;q)_{i-1}}{(abq^2;q)_{2i+r-1} (abq^{i+r};q)_{i-1}},$$

$$v_j^i = \begin{cases} o_j^i & \text{if } i \text{ is odd,} \\ e_j^i & \text{if } i \text{ is even,} \end{cases}$$

とする. ここで

$$o_j^i = \frac{(q^{j-i};q)_i}{(q;q)_i} \cdot \frac{(aq^{i+r+1};q)_{j-i-1}}{(abq^{2i+r+1};q)_{j-i-1}},$$

$$e_j^i = q \frac{(q^{j-i};q)_1 (q^{j-i+2};q)_{i-2}}{(q;q)_{i-1}} \cdot \frac{(aq^{i+r};q)_{j-i} f(i,j,r)}{(abq^{2i+r-3};q)_1 (abq^{2i+r-1};q)_{j-i+1}},$$

とし, $f(i,j,r)$ は

$$\begin{aligned} f(i,j,r) = (1-q^{i-1})(1-aq^{i+r-1})(1-abq^{i+j+r-2})/(1-q) \\ + aq^{2i+r-3}(1-b)(1-q^{j-i+1}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

によって定義する. 行列 T, V を $T = \bigoplus_{i\geq 1} \begin{pmatrix} 0 & t_{2i-1} \\ -t_{2i-1} & 0 \end{pmatrix}$ と $V = \left(v_j^i\right)_{i,j\geq 1}$ によって定義すれば

$$A = {}^t V T V \tag{3.3}$$

が A のパフィアン分解を与える.

この定理から次の系がすぐに得られる.

系 **3.2.** $n \geq 1$ と r は整数とする．このとき次式が成り立つ．

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$$
$$= a^{n(n-1)}q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r}\prod_{k=1}^{n-1}(bq;q)_{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{2k+r-1}}{(abq^2;q)_{2(k+n)+r-3}}. \tag{3.4}$$

実際, 定理 3.1 からもっと一般的な式が得られる: A が上の通りとし, m が正整数とする．このとき次式が成り立つ:

$$\mathrm{Pf}\left(A_{[2n-1],m}\right) = a^{n(n-1)}q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r}$$
$$\times\frac{(q^{m-2n+1};q)_{2n-1}(aq;q)_{m+r-1}}{(abq^2;q)_{m+2n+r-3}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(bq;q)_{2k}(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{2k+r-1}}{(abq^2;q)_{2(k+n)+r-3}}, \tag{3.5}$$
$$\mathrm{Pf}\left(A_{[2n-2],2n,m}\right) = a^{n(n-1)}q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r+1}f(2n,m,r)$$
$$\times\frac{(q^{m-2n};q)_1(q^{m-2n+2};q)_{2n-2}(aq;q)_{m+r-1}}{(abq^{4n+r-3};q)_1(abq^2;q)_{m+2n+r-2}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(bq;q)_{2k}(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{2k+r-1}}{(abq^2;q)_{2(k+n)+r-3}}. \tag{3.6}$$

ここで $f(i,j,r)$ は (3.2) 式で定義されたものである．

次に Corollary 3.2 の特殊化を述べる．(3.4) 式において $a=q^{\alpha}$, $b=q^{\beta}$ と置いて, 極限 $q\to 1$ を取ると次の系を得る:

系 **3.3.** $n \geq 1$ と r を整数とする．このとき, 次式が成り立つ:

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)\frac{(\alpha+1)_{i+j+r-2}}{(\alpha+\beta+2)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$$
$$=\prod_{k=1}^{n-1}(\beta+1)_{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!(\alpha+1)_{2k+r-1}}{(\alpha+\beta+2)_{2(k+n)+r-3}}. \tag{3.7}$$

ここでは, 次の記号を使う:

$$(\alpha)_n=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i-1) & \text{if } n\geq 0,\\ 1/\prod_{i=1}^{-n}(\alpha+i+n-1) & \text{if } n<0.\end{cases}$$

[5, 23] の論文を動機付けとして [19, Theorem 6] において, ほとんど同値の結果が得られている. [8] の中で Ciucu と Krattenthaler は, このパフィアンの特殊な場合を計算し, ひし形タイリング問題へ応用した. さらに (3.7) 式において $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\operatorname{Pf}\Big((j-i)C_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{(4k+1)!}{(2k)!}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!(4k+2r-2)!}{(2k+r-1)!\{2(k+n)+r-2\}!} \tag{3.8}$$

が得られる. ここで $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ は カタラン数である. また, (3.7) 式で $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$ とおくと, 次式を得る:

$$\operatorname{Pf}\Big((j-i)C^{(D)}_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{(4k)!}{(2k)!}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!(4k+2r-2)!}{(2k+r-1)!\{2(k+n)+r-3\}!} \tag{3.9}$$

ここで $C^{(D)}_n=\binom{2n}{n}$ は普通 **central binomial coefficients** と言われる.

ラゲール多項式 ([20] を見よ) は次式によって定義される:

$$L^{(\alpha)}_n(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ \alpha+1\end{matrix};x\right).$$

$L^{(\alpha)}_n(x)$ は内積

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f(x)g(x)\,dx$$

に関して直交している. ここで, 一般に

$$\operatorname{Pf}(c_ic_ja^i_j)_{1\le i,j\le 2n}=c_1\dots c_{2n}\operatorname{Pf}(a^i_j)_{1\le i,j\le 2n} \tag{3.10}$$

であることに注意すると, (3.7) 式に $\beta^{n(2n+1)+n(r-2)}$ を掛けて $\beta\to\infty$ という極限を取ることにより我々は次の系を得る.

系 3.4. $n\ge 0$ に対して $\mu_n=(\alpha+1)_n$ と置くと, これはラゲール多項式のモーメントとして知られている. このとき, 次式が成り立つ:

$$\operatorname{Pf}\Big((j-i)\mu_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i,j\le 2n}=\prod_{k=1}^{n}(2k-1)!(\alpha+1)_{2k+r-1}. \tag{3.11}$$

エルミート多項式 ([20] を見よ) は

$$H_n(x) = (2x)^n \, {}_2F_0\left(\begin{matrix} -n/2, -(n-1)/2 \\ - \end{matrix}; -\frac{1}{x^2}\right)$$

によって定義され

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x)\, dx$$

によって与えられる内積に関して直交している. (3.11) 式に $\alpha = \frac{1}{2}$ を代入することによって次の系が得られる.

系 3.5. $n \geq 0$ に対して $\mu_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ と置くと, これはエルミート多項式のモーメントである. このとき, 次式を得る:

$$\operatorname{Pf}\Big((j-i)\mu_{i+j+r-2}\Big)_{1\leq i,j\leq 2n} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} (4k-2)!!(4k+2r-1)!!. \tag{3.12}$$

4 定理 3.1 の証明

a_j^i, t_i, v_j^i を定理 3.1 の通りとする. (3.3) 式を証明するためには, $i, j \geq 1$ に対して次式を示せば十分である:

$$\sum_{k\geq 1} \left(v_i^{2k-1} t_{2k-1} v_j^{2k} - v_i^{2k} t_{2k-1} v_j^{2k-1}\right) = a_j^i. \tag{4.1}$$

aq^r を改めて a と置くことによって, 今後 $r=0$ とした式を証明すれば十分である. この場合 (4.1) 式は次のように書きなおせる:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1} a^{2(k-1)} q^{2(k-1)(2k-1)+1} \cdot \frac{(q^{i-2k+2};q)_{2k-2} (q^{j-2k+2};q)_{2k-2}}{(q;q)_{2k-1}} \\
&\cdot \frac{(aq^{2k};q)_{i-2k} (aq;q)_{j-1} (bq;q)_{2(k-1)}}{(abq^{2k-1};q)_{2k-1} (abq^{4k-1};q)_{i-2k+1} (abq^2;q)_{j+2k-2}} \\
&\cdot \Big\{ (1-q^{i-2k+1})(1-q^{j-2k})(1-abq^{i+2k-1}) f(2k,j,0) \\
&\qquad - (1-q^{i-2k})(1-q^{j-2k+1})(1-abq^{j+2k-1}) f(2k,i,0) \Big\} = a_j^i.
\end{aligned}$$

$2k-1$ を k と書きなおすと, 次式を示せばよい:

$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ k\text{ odd}}} a^{k-1}q^{k(k-1)+1}\cdot\frac{(abq^{2k};q)_1(abq^2;q)_{k-2}(bq,q^{i-k+1},q^{j-k+1};q)_{k-1}}{(q,aq,abq^{i+1},abq^{j+1};q)_k}$$
$$\times g_k(i,j;a,b,q)=\frac{(aq;q)_{i+j-2}(abq^2;q)_{i-1}(abq^2;q)_{j-1}}{(aq;q)_{i-1}(aq;q)_{j-1}(abq^2;q)_{i+j-2}}. \tag{4.2}$$

ここで $g_k(i,j;a,b,q)$ は

$$\begin{aligned}g_k(i,j;a,b,q)&=(1-q^k)(1-aq^k)\\&\quad\times\left\{q^{-k}(1+abq^{2k})(1+abq^{i+j-1})-ab(1+q)\left(q^{i-1}+q^{j-1}\right)\right\}\\&\quad+aq^{k-1}(1-b)\left(1-q^{i-k}\right)\left(1-q^{j-k}\right)\left(1-abq^{2k+1}\right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

とする. ここで, (4.2) 式は左辺の和の k を偶数を動かしても成り立つことがコンピュータ実験により観察された. そこで, その式も新たな予想として付け加える. すなわち

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ k\text{ even}}} a^{k-1}q^{k(k-1)+1}\cdot\frac{(abq^{2k};q)_1(abq^2;q)_{k-2}(bq,q^{i-k+1},q^{j-k+1};q)_{k-1}}{(q,aq,abq^{i+1},abq^{j+1};q)_k}$$
$$\times g_k(i,j;a,b,q)=\frac{(aq;q)_{i+j-2}(abq^2;q)_{i-1}(abq^2;q)_{j-1}}{(aq;q)_{i-1}(aq;q)_{j-1}(abq^2;q)_{i+j-2}}. \tag{4.4}$$

(4.2) 式と (4.4) 式を足すことと引くことにより, これらの二つの式は, 次の二式と同値であることになる:

$$\sum_{k\geq 0} a^{k-1}q^{k(k-1)+1}\cdot\frac{(abq^{2k};q)_1(abq^2;q)_{k-2}(bq,q^{i-k+1},q^{j-k+1};q)_{k-1}}{(q,aq,abq^{i+1},abq^{j+1};q)_k}$$
$$\times g_k(i,j;a,b,q)=\frac{2(aq;q)_{i+j-2}(abq^2;q)_{i-1}(abq^2;q)_{j-1}}{(aq;q)_{i-1}(aq;q)_{j-1}(abq^2;q)_{i+j-2}} \tag{4.5}$$

と

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k a^{k-1}q^{k(k-1)+1}\cdot\frac{(abq^{2k};q)_1(abq^2;q)_{k-2}(bq,q^{i-k+1},q^{j-k+1};q)_{k-1}}{(q,aq,abq^{i+1},abq^{j+1};q)_k}$$
$$\times g_k(i,j;a,b,q)=0. \tag{4.6}$$

(4.5) 式を示すためには $g_k(i,j;a,b,q)$ を

$$
\begin{aligned}
g_k(i,j;a,b,q) &= q^{-1-k}(q+aq^{i+j})(1-q^k)(1-q^{k-1})(1-abq^k)(1-abq^{k+1}) \\
&+ q^{-1}\Big\{a(bq-ab-1+b)(1-q^{i+j})+(1-a)(q-ab) \\
&\quad + a(1+bq)(1-q^i)(1-q^j)+(1+aq^{i+j-1})(1-q)(1-abq)\Big\}(1-q^k)(1-abq^k) \\
&+ aq^{k-1}(1-b)(1-abq)(1-q^i)(1-q^j).
\end{aligned}
$$

のように変形してから, 補題 4.1 の q-Dougall 公式を各項に適用すると, 直接計算によって (4.5) 式が証明できる. もう一つの (4.6) 式を証明するには, この式を次のように一般化する:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}(-1)^k a^{k-1} q^{k(k-1)+1} \\
&\qquad\times \frac{(1-abq^{2k})(abq^2;q)_{k-2}(bq,cq^{-k+1},dq^{-k+1};q)_{k-1}\widehat{g}_k(a,b,c,d,q)}{(q,aq,abcq,abdq;q)_k} \\
&= \frac{a^m c^m d^m (1-abq^{2m+1})(abq^2;q)_{m-1}(bq,q/c,q/d\,;q)_m}{(-q)^m(q,aq,abcq,abdq\,;q)_m}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_k(a,b,c,d,q) &= (1-q^k)(1-aq^k) \\
&\times\left\{q^{-k}(1+abq^{2k})(1+abcdq^{-1})-abq^{-1}(1+q)(c+d)\right\} \\
&+ aq^{k-1}(1-b)(1-cq^{-k})(1-dq^{-k})(1-abq^{2k+1})
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

とする. すると (4.7) 式は m に関する数学的帰納法で証明できる. これによって, 定理 3.1 が証明された.

補題 4.1. m を整数とするとき, 次式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\ge m} a^{k-m} q^{k(k-m)} \cdot \frac{(1-abq^{2k})(abq^2;q)_{k+m-2}(bq,q^{i-k+1},q^{j-k+1};q)_{k-1}}{(q;q)_{k-m}(aq,abq^{i+1},abq^{j+1};q)_k} \\
&= (q^{i-m+1},q^{j-m+1},bq;q)_{m-1}\cdot\frac{(aq^{j+1};q)_{i-m}(abq^2;q)_{i-1}}{(aq;q)_i(abq^{j+1};q)_i}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

実際 (4.9) 式は q-Dougall formula (Jackson's formula) [4, (12.3.2)], [9, (2.4.2)]

$$
{}_6\phi_5\left[\begin{matrix} a, qa^{\frac12}, -qa^{\frac12}, b, c, q^{-n} \\ a^{\frac12}, -a^{\frac12}, aq/b, aq/c, aq^{n+1}\end{matrix}\,;\, q, \frac{aq^{n+1}}{bc}\right] = \frac{(aq,aq/bc;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n} \tag{4.10}
$$

に, 次の代入を行うことによって得られる:

$$a \leftarrow abq^{2m}, \quad b \leftarrow bq^m, \quad c \leftarrow q^{m-j}, \quad n \leftarrow i-m.$$

この節で, 我々は実際には2つの式 (4.2) と (4.4) を証明した. (4.2) 式は 定理 3.1 を証明するのに使われたが, もう1つの (4.4) は何も役に立たないのだろうか? 実際に (4.4) 式は, 別の反対称行列のパフィアン分解を与える式だと解釈できる. 次にそれを示そう. $i, j \geq 0$ に対して a_j^i を $i=0$ のときは

$$a_j^0 = \frac{(abq^{r-1};q)_1(aq;q)_{j+r-1}}{aq^r(1-b)(abq^2;q)_{j+r-2}}, \tag{4.11}$$

$i, j \geq 1$ のときは (3.1) 式, また反対称性より $a_0^i = -a_i^0$, $a_0^0 = 0$ によって定義する. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. a_j^i を上記の通りとし, $\widetilde{A} = (a_j^i)_{i,j\geq 0}$ とおく. t_i, o_j^i, e_j^i を 定理 3.1 の通りとし,

$$\widetilde{v}_j^i = \begin{cases} o_j^i & \text{if } i \text{ is even}, \\ e_j^i & \text{if } i \text{ is odd}, \end{cases}$$

とおく. このとき $\widetilde{T} = \bigoplus_{i\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & t_{2i} \\ -t_{2i} & 0 \end{pmatrix}$ と $\widetilde{V} = \left(\widetilde{v}_j^i\right)_{i,j\geq 0}$ とおけば,

$$\widetilde{A} = {}^t\widetilde{V}\,\widetilde{T}\,\widetilde{V} \tag{4.12}$$

は $\widetilde{A}$ のパフィアン分解を与える.

系 4.3. $n \geq 1$ と r を整数とする. このとき, 次式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pf}\left(a_j^i\right)_{0\leq i,j\leq 2n-1} &= a^{n(n-2)} q^{n(n-1)(4n-5)/3+n(n-2)r} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q)_{2k}(aq;q)_{2k+r}(bq;q)_{2k-1}}{(abq^2;q)_{4k+r-1}(abq^{2k+r};q)_{2k-1}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

(4.13) 式の右辺を $P_{n,r}(a,b;q)$ とおくことにする. このとき, より一般に次式が成り立つ:

$$\operatorname{Pf}\left(\widetilde{A}_{[0,2n-2],m-1}\right) = \frac{(q^{m-2n+1};q)_{2n-2}(aq^{2n+r-1};q)_{m-2n}}{(q;q)_{2n-2}(abq^{4n+r-3};q)_{m-2n}} P_{n,r}(a,b;q), \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Pf}\left(\widetilde{A}_{[0,2n-3],2n-1,m-1}\right) &= q \cdot \frac{(q^{m-2n};q)_1(q^{m-2n+2};q)_{2n-3}(aq^{2n+r-1};q)_{m-2n}}{(q;q)_{2n-2}(abq^{4n+r-5};q)_1(abq^{4n+r-3};q)_{m-2n+1}} \\ &\quad \times f(2n-1,m-1,r) P_{n,r}(a,b;q). \end{aligned} \tag{4.15}$$

ここでは $[i,j] = \{\, x \in \mathbb{Z} \,|\, i \leq x \leq j \,\}$ という区間の記号を用いた.

この他にも, 系 3.2 及び系 4.3 の shifted reverse plain partitions の重み付き数え上げへの応用が得られている. また, 定理 3.1 及び 定理 4.2 の Zeilberger algorithm を使った別証明も得られている. この場合の certificate は, 手計算で非常に短い式で与えられ, 本稿で述べた証明よりもむしろすっきりしていて易しいほどである. 紙面の都合で詳細は割愛せざる得ないが, 興味のある方は本論文 [14] を参照して欲しい.

参考文献

[1] M. Adler and P. Van Moerbeke, "Toda Versus Pfaff Lattice and Related Polynomials", *Duke Math. J.*, **112** (2002), 1–58.

[2] M. Aigner, *A Course in Enumeration*, Springer-Verlag, (2007).

[3] W. Al-Salam and L. Carlitz, "Some orthogonal q-polynomials", *Math. Nachr.*, **30** (1965), 47–61.

[4] G. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, (1999).

[5] R. Bacher, "Determinants of matrices related to the Pascal triangle". *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **14** (2002), 19–41.

[6] A. Benjamin, N. Cameron, J. Quinn and C. Yerger, "Catalan Determinants — A Combinatorial Approach", *Applications of Fibonacci Numbers 11*, Utilitas Mathematica Publ. Co., Winnipeg (2010).

[7] D. Bressoud, *Proofs and Confirmations*, Cambridge Univ. Press, (1999).

[8] M. Ciucu and C. Krattenthaler, "The interaction of a gap with a free boundary in a two dimensional dimer system", *Commun. Math. Phys.* (to appear).

[9] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).

[10] I. Gessel and G. Viennot, "Determinants, Paths, and Plane Partitions", preprint (1989).

[11] I. Gessel and G. Xin, "The Generating Function of Ternary Trees and Continued Fractions" *Electron. J. Combin.* **13** (2006), R53.

[12] R. Gosper, "Decision procedure for indefinite hypergeometric summation", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **75** (1978), 40–42.

[13] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A q-analogue of Catalan Hankel determinants", *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19–42.

[14] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants", `arXiv:1011.5941v1`.

[15] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Minor summation formula of Pfaffians", *Linear and Multilinear Alg.* **39** (1995), 285-305

[16] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Applications of minor summation formula, III: Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities", *J. Combin. Theory Ser. A.*, **113** (2006), 113–155.

[17] D. Kim, "On Combinatorics of Al-Salam Carlitz Polynomials", *Europ. J. Combinatoire*, **18** (1997), 295–302.

[18] D. Knuth, "Overlapping Pfaffians", *Electron. J. Combin.*, **3** (1996), R5.

[19] C. Krattenthaler, "Evaluations of Some Determinants of Matrices Related to the Pascal Triangle", *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **B47g** (2002), 19 pp.

[20] R. Koekoek, P. Lesky and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer-Verlag, (2000).

[21] T. Koornwinder "On Zeilberger's algorithm and its q-analogue", *J. Comp. Appl. Math.* **48** (1993), 91–111.

[22] J. Luque and J. Thibon "Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals", *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 5267–5292.

[23] M. Mehta and R. Wang, "Calculation of a Certain Determinant", *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227–232.

[24] M. Noumi, *Painlevé equations through symmetry*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 223, American Mathematical Society, (2004).

[25] M. Petkovšek, H. Wilf and D. Zeilberger, $A = B$, A K Peters, (1996).

[26] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume I, II*, Cambridge University Press, 1997, 1999.

[27] J. Stembridge "Nonintersecting Paths, Pfaffians, and Plane Partitions", *Adv. Math.* **83** (1990), 96–131.